Corrigé Exercice 1

1) a) Définition de la valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x.

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

b) Calculons $|3|$ et $|-2|$.

$|3| = 3$, $|-2| = -(-2) = 2$

2) a) Exprimons la distance $\mathrm{d}(a;b)$ entre deux nombres réels a et b sur l'axe des réels en terme de valeur absolue.

$\mathrm{d}(a;b) = |a-b| = |b-a|$

b) Calculs les distances.

- $\mathrm{d}(3.2;1.4) = |1.4-3.2| = |-1.8| = 1.8$
- $\mathrm{d}(-1;3) = |3-(-1)| = |4| = 4$
- $\mathrm{d}\left(\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right) = \left|\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{11}{6}\right| = \frac{11}{6}$
- $\mathrm{d}\left(\sqrt{8};\sqrt{2}\right) = \left|\sqrt{2}-\sqrt{8}\right| = \left|\sqrt{2}-\sqrt{4\times 2}\right| = \left|\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right| = \left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

3) Traduisons l'inégalité $|x+1| < 4$ par l'appartenance de x à un intervalle.

$|x+1| < 4$ si et seulement si

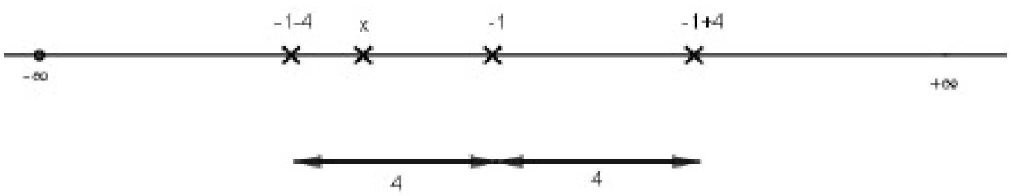
$$|x-(-1)| < 4$$

$$\mathrm{d}(x;-1) < 4$$

$$-1-4 < x < -1+4$$

$$-5 < x < 3$$

$$x \in \,]-5;3[$$



4) Traduisons l'inégalité $|x-5| \geq 3$ par l'appartenance de x à une réunion d'intervalles.

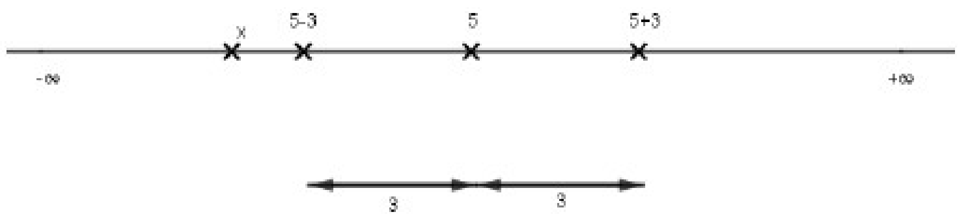
$|x-5| \geq 3$ si et seulement si

$\mathbf{d}(x;5) \geq 3$

$x \leq 5-3$ ou $x \geq 5+3$

$x \leq 2$ ou $x \geq 8$

$x \in]-\infty;2] \cup [8;+\infty[$



Corrigé Exercice 2

1) a) Le milieu de l'intervalle $[-5;8]$ est

$$\frac{(-5)+8}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

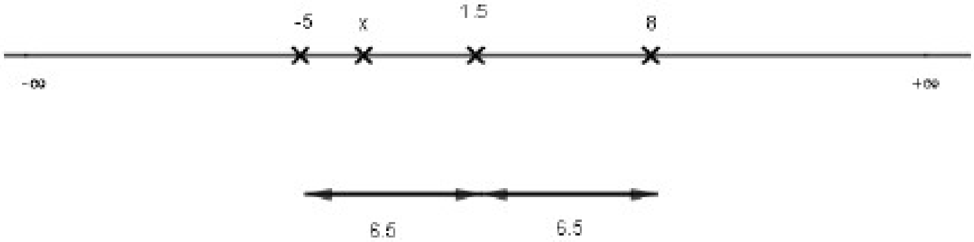
b) L'amplitude de l'intervalle $[-5;8]$ est

$$d(-5;8) = |8-(-5)| = |13| = 13$$

c) Le rayon de l'intervalle $[-5;8]$ est

$$\frac{1}{2}d(-5;8) = \frac{1}{2}13 = 6.5$$

d) Exprimons $x \in [-5;8]$ en terme de distance puis de valeur absolue.



$x \in [-5;8]$ si et seulement si

$$d(x;1.5) \leq 6.5$$

$$|x-1.5| \leq 6.5$$

2) Exprimer en terme de valeur absolue.

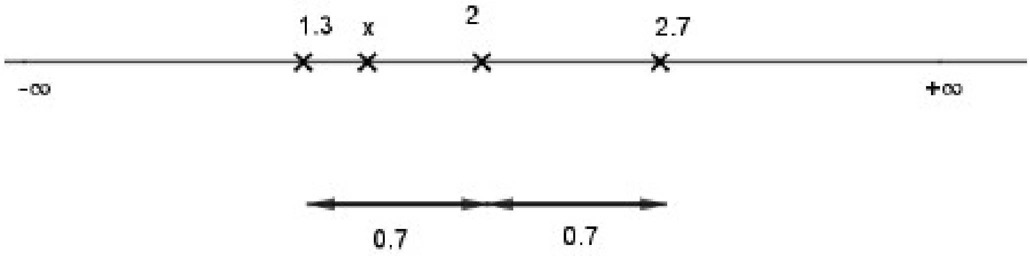
a) $x \in]1.3;2.7[$

Le milieu de l'intervalle $]1.3;2.7[$ est

$$\frac{1.3+2.7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Le rayon de l'intervalle $]1.3;2.7[$ est

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(1.3;2.7) = \frac{1}{2}|2.7-1.3| = \frac{1}{2}|1.4| = \frac{1}{2}1.4 = 0.7$$



$x \in\ ]1.3;2.7[$ si et seulement si

$$\mathrm{d}(x;2) < 0.7$$

$$|x-2| < 0.7$$

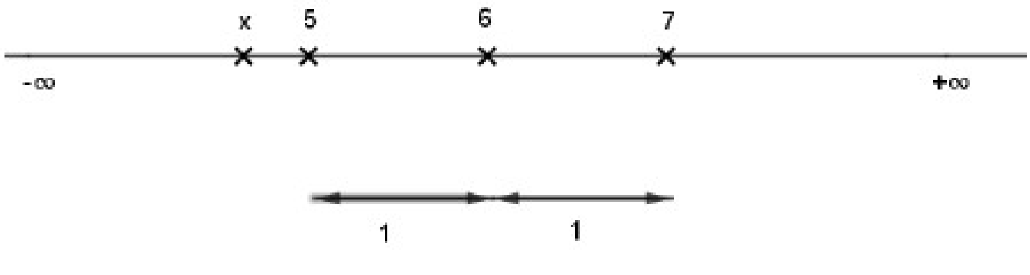
b) $x \in\ ]-\infty;5] \cup [7;+\infty[$

Le milieu de l'intervalle $]5;7[$ est

$$\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Le rayon de l'intervalle $]5;7[$ est

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(5;7) = \frac{1}{2}|7-5| = \frac{1}{2}|2| = \frac{1}{2}2 = 1$$



$x \in\ ]-\infty;5] \cup [7;+\infty[$ si et seulement si

$$\mathrm{d}(x;6) \geq 1$$

$$|x-6| \geq 1$$

Corrigé Exercice 3

```python
from math import *

def d(a,b):
  return abs(a-b)

a=float(input("a? "))
b=float(input("b? "))
d=d(a,b)
print(d)

```

Corrigé Exercice 4

1) $-5x \geqslant 0$; $\dfrac{-5x}{-5} \leqslant \dfrac{0}{-5}$; $x \leqslant 0$; $x \in]-\infty ; 0]$

2) $-\dfrac{x}{7} < 0$; $\left(-\dfrac{x}{7}\right) \times (-7) > 0 \times (-7)$; $x > 0$; $x \in]0 ; +\infty[$

3) $6x - 9 \geqslant 0$; $6x - 9 + 9 \geqslant 0 + 9$; $6x \geqslant 9$; $\dfrac{6x}{6} \geqslant \dfrac{9}{6}$
$x \geqslant \dfrac{3}{2}$; $x \in \left[\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$.

4) $-6x + 11 \leqslant 0$; $-6x + 11 - 11 \leqslant 0 - 11$; $-6x \leqslant -11$;
$\dfrac{-6x}{-6} \geqslant \dfrac{-11}{-6}$; $x \geqslant \dfrac{11}{6}$; $x \in \left[\dfrac{11}{6} ; +\infty\right[$

5) $-8x - 4 \leqslant 2x + 9$; $-8x - 4 + 4 \leqslant 2x + 9 + 4$;
$-8x \leqslant 2x + 13$; $-8x - 2x \leqslant 2x + 13 - 2x$;
$-10x \leqslant 13$; $\dfrac{-10x}{-10} \geqslant \dfrac{13}{-10}$; $x \geqslant -\dfrac{13}{10}$;
$x \in \left[-\dfrac{13}{10} ; +\infty\right[$.

6) $5x - 2 \geqslant -4x + 1$; $5x - 2 + 2 \geqslant -4x + 1 + 2$;
$5x \geqslant -4x + 3$; $5x + 4x \geqslant -4x + 3 + 4x$;
$9x \geqslant 3$; $\dfrac{9x}{9} \geqslant \dfrac{3}{9}$; $x \geqslant \dfrac{1}{3}$;
$x \in \left[\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$.

Corrigé Exercice 5

L'aire d'un rectangle de côtés 2 et x est $2 \times x = 2x$

L'aire d'un disque de diamètre x et donc de rayon $r = \frac{x}{2}$ est

$$\pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \pi \frac{x}{2}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}x^2.$$

De plus $2x > \frac{\pi}{4}x^2$ si et seulement si

$$\frac{2x}{x} > \frac{\frac{\pi}{4}x^2}{x}$$

(on ne change pas l'ordre car $x>0$)

$$2 > \frac{\pi}{4}x$$

$$\frac{\pi}{4}x < 2$$

$$\frac{\frac{\pi}{4}x}{\frac{\pi}{4}} < \frac{2}{\frac{\pi}{4}}$$

$$x < 2 \times \frac{4}{\pi}$$

$$x < \frac{8}{\pi}.$$